

Лекция 13

Тема. Функции нескольких переменных: формула Тейлора, экстремум.

План лекции:

- 1) Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
- 2) Основные понятия.
- 3) Необходимые условия экстремума функции двух переменных.
- 4) Знакоопределенные квадратичные формы.
- 5) Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
- 6) Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа в задаче нахождения условного экстремума.
- 7) Наибольшее и наименьшее значение функции в ограниченной замкнутой области.

§1. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

Формула Тейлора для функции нескольких переменных по форме полностью аналогична формуле Тейлора для функции одной переменной.

Теорема (Формула Тейлора)

Если функция $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_0, \delta)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, является $n + 1$ раз дифференцируемой в окрестности $S(\mathbf{x}_0, \delta)$, то для всех точек этой окрестности справедлива формула

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(\mathbf{x}_0) + R_n(\mathbf{x}),$$

где

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)), \quad 0 < \theta < 1$$

- остаток в форме Лагранжа.

В частности, для функции двух переменных теорему можно записать в виде:

Теорема. Формула Тейлора в форме Лагранжа.

Пусть функция f задана в области D и имеет там $m + 1$ непрерывную частную производную. Пусть отрезок между точками (x, y) и $(x + h, y + k)$ лежит в D . Тогда существует такое число $\vartheta \in (0, 1)$, что

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m+1} f(x + \vartheta h, y + \vartheta k). \end{aligned}$$

Теорема (Ряд Тейлора)

Если функция $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_0, \delta)$, бесконечно дифференцируема и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\mathbf{x}) = 0$, то эта функция допускает представление в виде степенного ряда

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(\mathbf{x}_0),$$

который называется рядом Тейлора для функции f в окрестности $S(x_0, \delta)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Разложить функцию $f(x, y) = e^{x/y}$ по формуле Тейлора с центром в точке $M_0(0, 1)$ до членов второго порядка включительно.

Решение. Сначала находим частные производные функции $f(x, y)$ до второго порядка включительно.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}; & \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{x/y} \cdot \left(\frac{-x}{y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^2}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^{x/y} \cdot \left(\frac{-x}{y^3} \right) + e^{x/y} \cdot \left(\frac{-1}{y^2} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{x/y} \cdot \left(\frac{x^2}{y^4} \right) + e^{x/y} \cdot \left(\frac{2x}{y^3} \right).\end{aligned}$$

В точке $M_0(0, 1)$ имеем:

$$f(M_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 0.$$

Подставив эти выражения в формулу Тейлора, получаем

$$e^{x/y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_3 = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - xy + R_3. \text{ В форме Пеано } R_3 = o(x^2 + (y-1)^2).$$

Пример 2. Найти разложение по формуле Тейлора для функции $f(x, y) = e^x \sin y$ в точке $O(0, 0)$ до слагаемых третьего порядка включительно.

Решение. Значение функции в точке O : $f(0, 0) = e^0 \sin 0 = 0$.

Частные производные первого порядка равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y;$$

их значения в точке O :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = 1.$$

Частные производные второго порядка равны

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y;$$

их значения в точке O :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; 0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0; 0) = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0; 0) = 0.$$

Наконец, частные производные третьего порядка равны

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -e^x \cos y;$$

их значения в точке O :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0; 0) = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0; 0) = 1; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0; 0) = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0; 0) = -1.$$

Значит, формула Тейлора, учитывающая слагаемые до третьего порядка включительно, такова:

$$\begin{aligned}f(x; y) &= e^x \sin y \approx 0 + 0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(0 \cdot (x - 0)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (x - 0)(y - 0) + 0 \cdot (y - 0)^2 \right) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(0 \cdot (x-0)^3 + 3 \cdot 0 \cdot (x-0)^2(y-0) + 3 \cdot 0 \cdot (x-0)(y-0)^2 + (-1) \cdot (y-0)^3 \right) =$$

$$y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3.$$

Окончательно:

$$f(x; y) = e^x \sin y \approx y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3.$$

Пример 3. Найти квадратичное приближение для функции $f(x, y) = x^y$ в окрестности точки $M(1,1)$ и вычислить приближённо значение выражения $0,98^{1,05}$.

Решение. Имеем:

$$f(1; 1) = 1^1 = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1; 1) = yx^{y-1} \Big|_{x=1; y=1} = 1 \cdot 1^0 = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1; 1) = x^y \ln x \Big|_{x=1; y=1} = 1^1 \ln 1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1; 1) = y(y-1)x^{y-2} \Big|_{x=1; y=1} = 1 \cdot 0 \cdot 1^{-1} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1; 1) = \left(yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} \right) \Big|_{x=1; y=1} = 1 \cdot 1^0 \ln 1 + 1^0 = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1; 1) = x^y \ln^2 x \Big|_{x=1; y=1} = 1^1 (\ln 1)^2 = 0.$$

Поэтому искомое приближение будет иметь вид

$$f(x, y) = x^y \approx 1 - 1(x-1) + 0(y-1) +$$

$$\frac{1}{2}(0(x-1)^2 + 2 \cdot 1(x-1)(y-1) + 0(y-1)^2) - 1 + (x-1) + (x-1)(y-1).$$

Подставляя сюда $x = 0,98 = 1 + (-0,02)$ и $y = 1,05 = 1 + 0,05$, получаем:

$$0,98^{1,05} \approx 1 + (-0,02) + (-0,02) \cdot 0,05 = 0,979.$$

Пример 4. Найти разложение многочлена $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ по степеням биномов $(x-1)$ и $(y-2)$.

Решение. Для этого разложим функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора в точке $M(1,2)$. Имеем:

$$f(1; 2) = -9; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1; 2) = 3x^2 + 3y \Big|_{x=1; y=2} = 9; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1; 2) = -6y^2 + 3x \Big|_{x=1; y=2} = -21;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1; 2) = 6x \Big|_{x=1; y=2} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1; 2) = 3 \Big|_{x=1; y=2} = 3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1; 2) = -12y \Big|_{x=1; y=2} = -24;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1; 2) = 6 \Big|_{x=1; y=2} = 6; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1; 2) = 0 \Big|_{x=1; y=2} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1; 2) = 0 \Big|_{x=1; y=2} = 0; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1; 2) = -12 \Big|_{x=1; y=2} = -12.$$

Все производные порядков 4 и выше тождественно равны 0. Поэтому остаточный член четвёртого порядка в формуле Тейлора будет тождественно равен 0 и мы получаем точное, а не приближённое равенство:

$$f(x; y) = x^3 - 2y^3 + 3xy =$$

$$= -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + \frac{1}{2}(6(x-1)^2 + 2 \cdot 3(x-1)(y-2) - 24(y-2)^2) + \frac{1}{6}(6(x-1)^3 - 12(y-2)^3) =$$

$$= -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3.$$

§2. Основные понятия.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — функция n аргументов. Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ — некоторая точка в D .

Определение локальных и глобальных максимумов и минимумов.

1. Точка x^0 называется *точкой максимума* (или *глобального максимума*) функции f в D , если в этой точке f принимает наибольшее в D значение, т.е.

$$f(x) \leq f(x^0) \quad \forall x \in D.$$

Аналогично определяется *точка минимума* (или *глобального минимума*) функции f в D .

2. Точка x^0 называется *точкой локального максимума* функции f в D , если существует окрестность O точки x^0 в D , в которой точка x^0 является точкой глобального максимума f , т.е.

$$f(x) \leq f(x^0) \quad \forall x \in O.$$

Аналогично определяется *точка локального минимума* функции f в D . $\square$

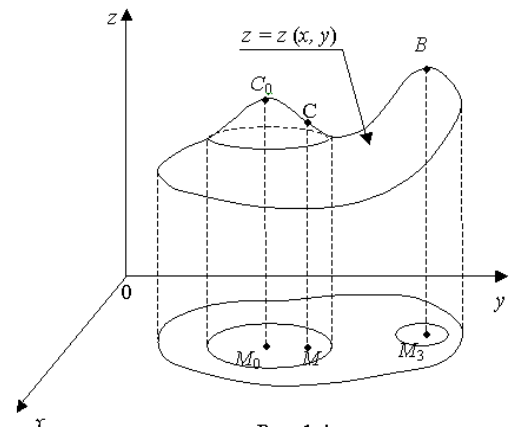
О терминологии. Точки максимума и точки минимума функции f называются точками экстремума, а значения f в них — экстремумами функции f .

Соответственно, точки локального минимума и локального максимума называются точками локального экстремума, а значения в них — локальными экстремумами.

В литературе по математическим методам в разных науках, в том числе в экономике, часто термин "экстремум" употребляют вместо термина "локальный экстремум". При этом максимум и минимум f называют наибольшим и наименьшим значениями, соответственно.

Пример. На карте горной местности локальными максимумами функции высоты над уровнем моря являются все горные вершины. Но только наивысшая вершина есть точка максимума.

На рис. изображена функция двух переменных. Поясним геометрический смысл локального максимума: $M_0(x_0; y_0)$ — точка максимума, так как на поверхности $z = z(x; y)$ соответствующая ей точка C_0 находится выше любой соседней точки C (в этом локальность максимума). Заметим, что на поверхности в целом есть точки (например, B), которые находятся выше C_0 , но эти точки (например, B) не являются "соседними" с точкой C_0 . В частности, точке B соответствует понятие глобального максимума: $\max z(x, y) = z_B = z(M_3)$.



Замечания.

1. Локальные и глобальные максимумы функции f в области D могут не существовать.

2. Если же x^0 — точка локального экстремума, то это свойство функции f в точках, близких к x^0 . Оно никак не связано со значениями функции f за пределами любой окрестности точки x^0 , в частности, от изменения области определения функции f (сужение или продолжение).

§3. Необходимые условия экстремума функции двух переменных.

Теорема. *Необходимое условие экстремума.*

Пусть x^0 — точка локального экстремума функции f в области D и функция f дифференцируема в x^0 . Тогда все частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

В частности, в случае функции двух переменных справедлива теорема.

Теорема. Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция $z = f(x; y)$ достигает экстремума, то каждая её частная производная первого порядка в этой точке равна нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$ или не существует.

Геометрическое доказательство для функции двух переменных $z = f(x; y)$ "очевидно". Пусть для простоты функция дифференцируемая. Если в точке C_0 на рис. провести касательную плоскость, то она "естественно" пройдет горизонтально, т. е. под углом 0° к оси OX и к оси OY . Тогда в соответствии с геометрическим смыслом частных производных: $f'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка в которой частные производные первого порядка функции f равны нулю называется *стационарной* точкой функции z (или точкой возможного экстремума). Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует называются *критическими* точками (точками возможного экстремума).

В критических точках функция может иметь экстремума, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

§4. Знакоопределенные квадратичные формы.

Функция

$$A(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

переменных $h_1, h_2, \dots, h_n$ называется *квадратичной формой*. Числа a_{ij} называются *коэффициентами квадратичной формы*.

Квадратичная форма (1) называется *положительно-определенной* (*отрицательно-определенной*), если для любых значений переменных $h_1, h_2, \dots, h_n$, для которых выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2 > 0$, эта форма имеет положительные (отрицательные) значения. Положительно- и отрицательно-определенные формы объединяются общим названием — *знакоопределенные формы*.

Сформулируем критерий знакоопределенности квадратичной формы — *критерий Сильвестра*. Для того чтобы квадратичная форма (1) была положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма (1) была отрицательно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

§5. Достаточные условия экстремума функции многих переменных.

Пусть задана функция $f: D \mapsto R$ ($D \subset R_n$), имеющая непрерывные частные производные второго порядка. Для того чтобы узнать, имеет ли f в точке x_0 локальный экстремум и каков характер этого экстремума, воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано, учитывая необходимое условие экстремума. Получим:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} h_j h_k + o(\|h\|^2), \quad (x \rightarrow x_0),$$

где $a_{jk} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_k}$, $h_j = x_j - x_j^0$, $h = (h_1, \dots, h_n)$. Из этого представления ясно, что поведение разности $f(x) - f(x_0)$ в окрестности точки x_0 определяется поведением квадратичной формы

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} h_j h_k. \text{ Справедливы следующие теоремы:}$$

Теорема.

Пусть в некоторой окрестности стационарной точки x_0 функция f дважды дифференцируема и все частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) непрерывны в точке x_0 . Если в этой точке второй дифференциал $d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ независимых переменных, то в точке x_0 функция f принимает локальный экстремум. При этом если $d^2 f(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция f принимает локальный максимум, а если $d^2 f(x_0) > 0$, то локальный минимум.

Теорема.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ m раз дифференцируема и все частные производные m -го порядка непрерывны в этой точке, причем

$$df(x_0) = 0, \quad d^2 f(x_0) \equiv \dots \equiv d^{m-1} f(x_0) \equiv 0, \quad d^m f(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если m нечетное, точка x_0 не является экстремальной, если же m четное, то в точке x_0 функция f имеет экстремум: локальный максимум, если $d^m f(x_0) < 0$, и локальный минимум если $d^m f(x_0) > 0$.

Теорема (критерий Сильвестра для случая функции двух переменных)

Пусть в стационарной точке $M_0(x_0; y_0) \in D$ и некоторой ее окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $M_0(x_0; y_0)$ значения $A = f''_{xx}(x_0; y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0; y_0)$.

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1. Если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет экстремум, причем это локальный максимум если $A < 0$, и локальный минимум, если $A > 0$.
2. Если $\Delta < 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.
3. В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Требуется дальнейшее дополнительное исследование.

Доказательство теоремы можно найти в любом учебнике по мат. анализу (используется формула Тейлора функции нескольких переменных и теория квадратичных форм).

Пример 5. Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Решение. Имеем $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют. Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \text{ отсюда получаем точки } M_1(6;3) \text{ и } M_2(0;0). \text{ Находим частные производные}$$

второго порядка данной функции: $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$.

В точке $M_1(6;3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда $AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648$, т.е. $\Delta > 0$. Так как $A < 0$, то в точке $M_1(6;3)$ функция имеет локальный максимум:

$$z_{\max} = z(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27.$$

В точке $M_2(0;0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0;0) = 0$. Можно заметить, что $z = -y^4 < 0$ при $x = 0$, $y \neq 0$; $z = -x^3 > 0$ при $x \neq 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки $M_2(0;0)$ функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет.

Пример 6. Найти точки экстремума функции: $z = x^3 - 3x + y^2 + 6y + 16$

Решение. Найдем стационарные точки функции. Для этого сначала найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6. \quad \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0; \\ 2y + 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1; \\ y = -3; \end{cases}$$

Решая систему уравнений находим стационарные точки $P_1(1, -3)$, $P_2(-1, -3)$. Выясним, достигает ли в них заданная функция экстремум. Находим значения вторых производных в точке P_1 :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 3)'_x = 6x, \quad A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P_1} = 6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y + 6)'_y = 2, \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{P_1} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 3)'_y = 0, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P_1} = 0.$$

Вычислим $\Delta = AC - B^2 = 12 > 0$ - функция в точке P_1 имеет экстремум. Так как $A = 6 > 0$, то в точке P_1 функция z имеет минимум:

$z_{\min}(1, -3) = 5$. Аналогично проводятся исследования для точки $P_2(-1, -3)$:

$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P_2} = -6$; $C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{P_2} = 2$; $B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P_2} = 0$; $\Delta = -12 - 0 = -12 < 0$ - экстремума в точке $P_2(-1, -3)$ нет.

Пример 7. Исследовать на экстремум: $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 - 1$

Решение. Найдем стационарные точки, решая систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y \cdot (x + 1) = 0 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \text{ или } x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{а) } \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow M_1(0; 0), M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right);$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = -1 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow M_3(-1; -2), M_4(-1; 2);$$

то есть найдены четыре стационарные точки. Далее:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (6x^2 + y^2 + 10x)'_x = 12x + 10; \quad z''_{yy} = (2xy + 2y)'_y = 2x + 2;$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (6x^2 + y^2 + 10x)'_y = 2y;$$

$$\text{а) берем } M_1(0, 0): z''_{xx}|_{M_1} = 10 = A_1, \quad z''_{yy}|_{M_1} = 2 = C_1, \quad z''_{xy}|_{M_1} = 0 = B_1,$$

$$D_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 20 > 0, \quad A_1 = 10 > 0 \Rightarrow$$

в точке $M_1(0,0)$ минимум. Причём

$$z_{\min} = z(M_1) = -1$$

$$\text{б) } M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right): z''_{xx}|_{M_2} = -10 = A_2, \quad z''_{yy}|_{M_2} = -\frac{4}{3} = C_2, \quad z''_{xy}|_{M_2} = 0 = B_2,$$

$$D_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = \frac{40}{3} > 0, \text{ и } A_2 = -10 < 0 \Rightarrow$$

$$\text{в точке } M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right) - \text{максимум. Причём } z_{\max} = z(M_2) = \frac{98}{27}$$

$$\text{в) } M_3(-1; -2): z''_{xx}|_{M_3} = -2 = A_3, \quad z''_{yy}|_{M_3} = 0 = C_3, \quad z''_{xy}|_{M_3} = -4 = B_4,$$

$$D_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = -16 < 0 \Rightarrow \text{в точке } M_3 \text{ экстремума нет;}$$

$$\text{г) } M_4(-1; 2): z''_{xx}|_{M_4} = -2 = A_4, \quad z''_{yy}|_{M_4} = 0 = C_4, \quad z''_{xy}|_{M_4} = 4 = B_4,$$

$$D_4 = A_4 C_4 - B_4^2 = -16 < 0 \Rightarrow \text{в точке } M_4 \text{ экстремума нет.}$$

$$\text{Ответ: } z_{\min} = z(M_1) = -1, \quad z_{\max} = z(M_2) = \frac{98}{27}.$$

Пример 8. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y.$$

$$\text{Стационарные точки определяются из системы } \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Она имеет три решения $M_0(0,0), M_1(-1,-1), M_2(1,1)$. Для применения достаточных условий локального экстремума вычислим вторые производные

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2.$$

Составим выражение $\Delta = AB - C^2$. В точке M_0 $\Delta(M_0) = 0$, следовательно, необходимы дополнительные исследования. Рассмотрим $\Delta z(0, 0) = z(h, k) - z(0, 0)$.

$$\text{При } h = k, \quad 0 < h < \sqrt{2} \text{ имеем } \Delta z(0, 0) = 2h^2(h^2 - 2) < 0$$

$$\text{При } h = -k, \quad h > 0, \text{ имеем } \Delta z(0, 0) = 2h^4 > 0.$$

Таким образом, приращение $\Delta z(0, 0)$ принимает значения разных знаков, а поэтому в точке $M_0(0,0)$ экстремума нет.

Далее в точках $M_1(-1, -1)$ и $M_2(1, 1)$, $\Delta = 96 > 0$, и так как $\Delta(M_1) = A(M_1) = 10 > 0$, то в этих точках достигается минимум, причём $z_{\min} = -2$.

§6. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа в задаче нахождения условного экстремума.

Пусть функция f определена в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Если в области аргументов D провести линию ℓ , то можно определить сужение f на ℓ , т.е. функцию $g: \ell \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству $g(x) = f(x)$ при всех $x \in \ell$.

Функция g может иметь в точке x^0 локальный экстремум, даже если функция f его не имела. Пример: $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ в точке $x^0 = (0, 0)$. На оси абсцисс (при $x_2 = 0$) сужение функции f имеет минимум в точке x^0 , а на оси ординат (при $x_1 = 0$) имеет максимум в точке x^0 . Сама же функция f в этой точке не имеет локального экстремума.

Линия ℓ или другое подмножество D , на котором требуется найти экстремумы f , обычно задается множеством уровня некоторой функции ϕ или пересечением множеств уровня нескольких функций $\phi_i(x)$.

Определение условного экстремума.

Пусть функция f и функции ϕ_k , $1 \leq k \leq m$, заданы в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x^0 \in D$. Точка x^0 называется *точкой условного экстремума f при условии*

$$\phi_1(x) = 0, \dots, \phi_m(x) = 0,$$

если сужение f на подмножество D , определяемое последними уравнениями, имеет экстремум в точке x^0 . $\square$

Говорят также, что переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$ связаны зависимостями $\phi_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq m$, и требуется найти экстремум f при учете этих зависимостей. Уравнения $\phi_k(x) = 0$, $1 \leq k \leq m$, называют также ограничениями или уравнениями связи.

Теорема. Необходимое условие условного экстремума.

Пусть функция f имеет в точке $x^0 \in D$ условный экстремум при условии $\phi_1(x) = 0, \dots, \phi_m(x) = 0$. Пусть все указанные функции дифференцируемы в области D . Тогда существуют такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, что для функции

$$F(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x)$$

точка x^0 является стационарной точкой, причем среди чисел λ_k есть ненулевые. $\square$

Функция $F(x)$ задана с точностью до множителя. Обычно коэффициент при функции f ненулевой, и его выбирают равным 1.

Определение функции Лагранжа в задаче условной оптимизации.

Функция

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x)$$

называется *функцией Лагранжа* в задаче на условный экстремум, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа*. $\square$

Метод множителей Лагранжа.

Пусть задана оптимизируемая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ и ограничения $\phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, $1 \leq k \leq m$. Требуется найти точки условного экстремума.

1. Составляется функция Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x).$$

2. Вычисляются частные производные $\partial L / \partial x$.

3. Определяются точки стационарности функции L по всем переменным. Для этого приравняются к нулю все частные производные функции L . Отметим, что $\partial L / \partial \lambda_k = \phi_k$.

4. Решается система из $n + m$ уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) &= 0, & 1 \leq i \leq n, \\ \phi_k(x_1, \dots, x_n) &= 0, & 1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

с $n + m$ неизвестными $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

5. Для полученных точек стационарности отдельно решается вопрос о наличии условного экстремума.

§7. Наибольшее и наименьшее значение функции в ограниченной замкнутой области.

Пусть функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D . Тогда она достигает в некоторых точках D своего наибольшего M и наименьшего m значений. Это значения достигается функцией в точках, расположенных внутри области D (стационарных точках), или в точках, лежащих на границе области.

Для определения наибольшего, наименьшего значения функции f на множестве D сравниваем наибольшее, наименьшее значение функции f в стационарных точках области D с наибольшим и наименьшим значениями функции f на границе области D .

Например, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $z = f(x; y)$ в замкнутой области D можно предложить следующий план:

1. Найти все критические точки функции, лежащие внутри области D , и вычислить значения функции в них (в данном случае нет необходимости исследовать функцию на экстремум).
2. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $z = f(x; y)$ на границах области. В данном пункте:
 - а) предварительно строим чертёж, выделяем все части границы области D .
 - б) находим все "угловые" точки границы. Вычисляем значения в "угловых" точках границы.
 - в) Находим стационарные точки на каждой из границ.
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них среди них наибольшее и наименьшее значения функции в данной области.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 6x + 1$ в области $D: \{x \geq 0, y \geq 1, x + y \leq 3\}$.

Решение. Построим область D (см. рис.) Угловые точки области $K(0,1), M(0,3), L(2,1)$ это точки пересечения линий: $x = 0$, $y = 1$, $x + y = 3$.

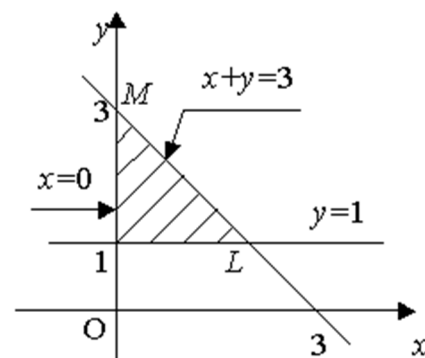
1. Найдем стационарные точки функции. Для этого сначала находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x + 4y.$$

Координаты стационарной точки являются решением системы:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0; \\ 4x + 4y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0; \\ x = -y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3; \\ x = -3. \end{cases}$$

Точка $P_1(-3,3)$ - стационарная. Точка P_1 не попадает в область D , следовательно, значение функции в этой точке не будем рассматривать.



2. Исследуем функцию на границах области D. Ее границы задаются уравнениями:

а) $x = 0$; б) $y = 1$; в) $x + y = 3$.

Рассмотрим подробно каждое из вышеперечисленных уравнений:

а) если $x = 0$, то $z = 2y^2 + 1$ - функция одной переменной y . Найдем ее стационарные точки:

$$z' = 4y \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Получаем стационарную точку $P_2(0,0)$, не попадающую в область D.

б) если $y = 1$, то $z = x^2 - 2x + 3$ - функция одной переменной x . Найдем ее стационарные точки:

$$z' = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Получаем стационарную точку $P_3(1,1)$, входящую в область D.

в) если $x + y = 3$, то $y = 3 - x$ и $z = x^2 + 2(3 - x)^2 + 4x(3 - x) - 6x + 1$.

Получаем, что $z = -x^2 - 6x + 19$ - функция одной переменной x .

Найдем ее стационарные точки: $z' = -2x - 6 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$

Получаем стационарную точку $P_4(-3,6)$, не попадающую в область D.

3. Таким образом, получили четыре точки, в которых функция может достигать наибольшего и наименьшего значения: P_3, K, M, L . Вычислим значение функции z в этих точках и выберем из них наибольшее и наименьшее:

$$z(P_3) = z(1,1) = 1 + 2 + 4 - 6 + 1 = 2 \text{ - наименьшее;}$$

$$z(K) = z(0,1) = 2 + 1 = 3;$$

$$z(M) = z(0,3) = 18 + 1 = 19 \text{ - наибольшее;}$$

$$z(L) = z(2,1) = 4 + 2 + 8 - 12 + 1 = 3.$$

Итак, наибольшее значение $z(0,3) = 19$; наименьшее значение $z(1,1) = 2$.